Analiza funkcjonalna

Egzamin podstawowy 20.06.2013 r.

Zestaw A

1. **Przestrzenie unormowane**

(a) Podać definicję przestrzeni liniowej unormowanej nad ciałem $\mathbb{K}$. (3p)

Rozwiązanie: Przestrzenią liniową unormowaną nad ciałem $\mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ jest taka przestrzeń liniowa X nad $\mathbb{K}$ (przytaczanie definicji przestrzeni liniowej nie było konieczne), w której określona jest *norma*, czyli funkcja $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$, taka że dla dowolnych $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$:

i. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

ii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

Typowe błędy: W wielu odpowiedziach zapominano wspomnieć, że norma jest funkcją z X w $[0, \infty)$ (można oczywiście było napisać, że jest funkcją z X w $\mathbb{R}$, a w jej własnościach wspomnieć, że jest nieujemna). Wiele osób zapomniało też o implikacji $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, podając tylko implikację odwrotną (która zresztą wynika z jednorodności, istotniejszy jest właśnie fakt, że norma zeruje się tylko dla wektora zerowego).

(b) W przestrzeni X złożonej z funkcji ograniczonych na półprostej $[1, \infty)$ określmy normę wzorem

$$\|f\| = \sup_{x \geq 1} \frac{|f(x)|}{x}.$$

Pokazać, że jest to rzeczywiście norma. (3p)

Rozwiązanie: Skoro funkcje są ograniczone, a $x > 1$, to podane we wzorze supremum jest skończone, czyli określa nam nieujemną funkcję rzeczywistą na X. Pozostaje zweryfikować własności normy. Niech zatem $f, g \in X$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ (albo $\mathbb{C}$, nic to nie zmienia w naszym zadaniu).

i.

$$\|f\| = 0 \iff \sup_{x \geq 1} \frac{|f(x)|}{x} = 0 \iff \forall_{x \geq 1} \frac{|f(x)|}{x} = 0 \iff f \equiv 0.$$

ii.

$$\|f + g\| = \sup_{x \geq 1} \frac{|f(x) + g(x)|}{x} \leq \sup_{x \geq 1} \frac{|f(x)| + |g(x)|}{x}.$$

Ponieważ supremum sumy nie przekracza sumy supremów (nie trzeba było tego uzasadniać), dalej mamy

$$\sup_{x \geq 1} \frac{|f(x)| + |g(x)|}{x} \leq \sup_{x \geq 1} \frac{|f(x)|}{x} + \sup_{x \geq 1} \frac{|g(x)|}{x} = \|f\| + \|g\|,$$

czyli podaddytywność normy jest udowodniona. Wreszcie dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$

iii.

$$\|\alpha f\| = \sup_{x \geq 1} \frac{|\alpha f(x)|}{x} = |\alpha| \sup_{x \geq 1} \frac{|f(x)|}{x} = |\alpha| \, \|f\|.$$

Typowe błędy: To zadanie na ogół wszyscy zrobili dobrze, warto było wspomnieć, że podany wzór rzeczywiście daje wartość rzeczywistą skończoną, ale po pierwsze jest to dość oczywiste, a po drugie ucinaliśmy za to przeoczenie punkty w następnym zadaniu.

(c) Niech $f_n = 1_{[n,\infty)}$. Do czego zbiega ciąg f_n w rozważanej normie? (6p)

Rozwiązanie: Przede wszystkim obliczmy normę f_n. Ponieważ funkcja ta jest równa 0 dla $x < n$, a 1 dla $x \geq n$, mamy

$$\|f_n\| = \sup_{x\geq 1} \frac{1_{[n,\infty)}(x)}{x} = \sup_{x\geq n} \frac{1}{x} = \frac{1}{n}.$$

Ciąg $(\frac{1}{n})$ dąży do zera, a więc $\|f_n\| \to 0$, co oznacza, że ciąg (f_n) zbiega w naszej normie do zera.

Typowe błędy: Wiele osób zapominało o tym, że funkcje f_n robią się niezerowe dopiero dla $x \geq n$ i wychodziło im, że $\|f_n\| = \sup_{x\geq 1} \frac{1}{x} = 1$, z czego wnioskowały (błędnie!), że ciąg f_n dąży w normie do funkcji stale równej 1. Na marginesie zauważmy, że z samego faktu, iż $\|f_n\| \to \|f\|$, nie wynika ogólnie, że f_n dążą do f w normie (czyli że $\|f_n - f\| \to 0$) — wniosek taki jest uprawniony tylko jeśli $f = 0$.

2. **Przestrzenie Hilberta**

(a) Podać definicję iloczynu skalarnego w przestrzeni liniowej nad ciałem liczb zespolonych. (3p)

Rozwiązanie: Niech H oznacza przestrzeń liniową nad $\mathbb{C}$. Iloczynem skalarnym na H nazywamy funkcję $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$, taką że dla dowolnych $x, y, z \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mamy:

i. $\langle x, x \rangle \geq 0$,
ii. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$,
iii. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$,
iv. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Własności te można oczywiście wysłowić na inne, równoważne sposoby (na przykład podając zamiast liniowości oddzielnie addytywność i jednorodność).

Typowe błędy: Wiele osób zapomniało wspomnieć, że iloczyn skalarny jest funkcją dwóch zmiennych z H przyjmującą wartości zespolone. Poza tym, tak samo jak przy normie, nie wszyscy pamiętali o wynikaniu $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$.

(b) Pokazać, że wzór

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}dx$$

określa iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów o wartościach zespolonych określonych na prostej rzeczywistej. (3p)

Rozwiązanie: Przede wszystkim należy sprawdzić, czy podany wzór ma sens, czyli czy całka rzeczywiście jest skończona. Funkcja wykładnicza rośnie do nieskończoności szybciej niż dowolny wielomian, a więc dla dowolnego n, jeśli tylko wartość $|x|$ jest odpowiednio duża, mamy $|x|^n < e^{\frac{x^2}{2}}$, a stąd dla x dalekich od zera mamy $|x^n|\, e^{-x^2} < e^{-\frac{x^2}{2}}$. Funkcja po prawej stronie jest całkowalna, zatem (z kryterium porównawczego) funkcja po lewej też (zresztą najdalej po drugim semestrze analizy powinniśmy być w stanie obliczyć jej całkę dokładnie). Z liniowości całkowania oznacza to, że dla dowolnych wielomianów f, g całka $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,|g(x)|\, e^{-x^2} dx$ jest skończona, czyli wzór z zadania rzeczywiście zawsze daje skończoną wartość zespoloną. Na egzaminie nie trzeba było tego aż tak dokładnie uzasadniać, ale koniecznie należało o tym wspomnieć! Pozostaje zweryfikować własności iloczynu skalarnego. Niech zatem f, g, h będą dowolnymi wielomianami, a α, β dowolnymi liczbami zespolonymi:

i.
$$\langle f, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx \geq 0.$$

ii. Z powyższego wynika, że $\langle f, f\rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja podcałkowa po prawej stronie jest stale równa zeru, czyli gdy f jest wielomianem zerowym.

iii.
$$\begin{aligned}\langle \alpha f + \beta g, h\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\overline{h(x)}e^{-x^2} dx = \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{h(x)}e^{-x^2} dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{h(x)}e^{-x^2} = \\ &= \alpha \langle f, h\rangle + \beta \langle g, h\rangle .\end{aligned}$$

iv. e^{-x^2} jest liczbą rzeczywistą (więc równą swojemu sprzężeniu), a podwójne sprzężenie się znosi, mamy zatem

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)e^{-x^2} dx} = \overline{\langle g, f\rangle}.$$

Typowe błędy: Nikt nie sprawdził, że podany w zadaniu wzór rzeczywiście daje skończoną wartość zespoloną!

(c) Wyznaczyć rzut ortogonalny wielomianu $f(x) = x$ na podprzestrzeń rozpinaną przez wielomian $g(x) = 1$. (6p)

Rozwiązanie: Na wszelki wypadek przypomnijmy definicję rzutu ortogonalnego wektora v na podprzestrzeń W: jest to taki wektor $w \in W$, że $v - w \perp W$, czyli dla każdego $w' \in W$ mamy $\langle v - w, w'\rangle = 0$. W naszym przypadku

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx = 0,$$

bo funkcja podcałkowa jest nieparzysta. Skoro jednak wektory f i g są od razu ortogonalne, to rzutem f na podprzestrzeń rozpinaną przez g jest po prostu wektor zerowy.

Typowe błędy: Pisanie, że jeśli w jest rzutem ortogonalnym v na W, to $w \perp v$ (a to różnica wektorów ma być ortogonalna do podprzestrzeni W). Wiele osób miało też kłopoty z obliczeniem całki $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$.

3. **Operatory i funkcjonały**

(a) Sformułować twierdzenie Hahna-Banacha o przedłużaniu funkcjonału. (5p)

Rozwiązanie: Niech V_0 będzie dowolną podprzestrzenią przestrzeni liniowej unormowanej V i niech P_0 będzie dowolnym ciągłym funkcjonałem liniowym na V_0. Istnieje ciągły funkcjonał P na V, taki że $P|_{V_0} = P_0$ i $\|P\| = \|P_0\|$.

Typowe błędy: Wiele osób dopisywało niepotrzebne założenia (najczęściej że V jest zupełna albo że V_0 jest domknięta) lub zapominało o równości norm P_0 i P.

(b) Określmy na ℓ^1 funkcjonał P_n wzorem

$$P_n((x_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^n}.$$

Wyznaczyć funkcjonał P, do którego ciąg P_n zbiega $*$-słabo. (7p)

Rozwiązanie: Niech e^m oznacza m-ty wektor bazowy w ℓ^1 (czyli mający jedynkę na m-tym miejscu, a zera na pozostałych). Suma określająca $P_n(e^m)$ składa się tylko z $m-$tego wyrazu, zatem

$$P_n(e^m) = \frac{1}{m^n}.$$

Oznacza to, że $P_n(e^1) = 1$, zaś dla $m > 1$ mamy $P_n(e^m) \to 0$. Tak czy inaczej na wektorach bazowych funkcjonał zbiega do funkcjonału P „wyciągającego pierwszą współrzędną” czyli zadanego wzorem $P((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = x_1$. Wiemy z wykładu, że jeśli ciąg P_n zbiega do P na zbiorze liniowo gęstym (a wektory bazowe są takim zbiorem) i jest ograniczony w normie (a $|P_n((x_k))| \leq \sum |x_k| = \|x\|$, więc $\|P_n\| \leq 1$), to zbiega do P $*$-słabo, co kończy dowód. Zauważmy, że postać funkcjonału P można dość łatwo zgadnąć z postaci P_n (wszystkie składniki sumy poza pierwszym dążą po n do zera), badanie zachowania P_n na wektorach bazowych dostarcza nam natomiast precyzyjnego argumentu, że rzeczywiście P_n zbiegają do P $*$-słabo.

Typowe błędy: Wiele osób zapominało, że $\frac{1}{1^n} = 1$ i wychodziło im, że funkcjonały P_n zbiegają $*$-słabo do wektora zerowego. Częstym błędem było też pisanie $x_1 + \frac{x_2}{2^n} + \frac{x_3}{3^n} + \ldots \to x_1$ — zbieżność ta rzeczywiście zachodzi, ale wymaga nieco bardziej zaawansowanego uzasadnienia niż „wszystkie składniki poza pierwszym dążą do zera”.

Analiza funkcjonalna

Egzamin podstawowy 20.06.2013 r.

Zestaw B

1. **Przestrzenie unormowane**

(a) Podać definicję przestrzeni liniowej unormowanej nad ciałem $\mathbb{K}$. (3p)

Rozwiązanie: Przestrzenią liniową unormowaną nad ciałem $\mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ jest taka przestrzeń liniowa X nad $\mathbb{K}$ (przytaczanie definicji przestrzeni liniowej nie było konieczne), w której określona jest *norma*, czyli funkcja $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$, taka że dla dowolnych $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$:

i. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
ii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

Typowe błędy: W wielu odpowiedziach zapominano wspomnieć, że norma jest funkcją z X w $[0, \infty)$ (można oczywiście było napisać, że jest funkcją z X w $\mathbb{R}$, a w jej własnościach wspomnieć, że jest nieujemna). Wiele osób zapomniało też o implikacji $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, podając tylko implikację odwrotną (która zresztą wynika z jednorodności, istotniejszy jest właśnie fakt, że norma zeruje się tylko dla wektora zerowego).

(b) W przestrzeni wielomianów rzeczywistych określonych na półprostej $[0, \infty)$ wprowadzamy normę zadaną wzorem

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{-x} |f(x)| .$$

Pokazać, że jest to rzeczywiście norma. (3p)

Rozwiązanie: Przede wszystkim należy sprawdzić, czy podany wzór ma sens, czyli czy podana wartość jest skończona. Dla dowolnego n mamy $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ (wystarczy n razy zastosować regułę de L'Hospitala, ale na egzaminie wystarczyłoby nawet tylko napisać, że taka zbieżność zachodzi), a funkcja ciągła na $[0, \infty)$ i zbieżna do zera musi być ograniczona. Podane w definicji naszej normy supremum jest więc skończone dla funkcji postaci x^n, a tym samym dla dowolnych wielomianów (przy okazji zauważmy, ze przestaje być skończone, gdy przejdziemy od wielomianów do ogólnych funkcji ciągłych). Pozostaje zweryfikować własności normy. Niech zatem $f, g \in X$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

i.
$$\|f\| = 0 \iff \sup_{x\geq 0} |f(x)| \, e^{-x} = 0 \iff \forall_{x\geq 0} \, |f(x)| \, e^{-x} = 0 \iff f \equiv 0.$$

ii.
$$\|f + g\| = \sup_{x\geq 0} |f(x) + g(x)| \, e^{-x} \leq \sup_{x\geq 0} \left(|f(x)| + |g(x)|\right) e^{-x}.$$

Ponieważ supremum sumy nie przekracza sumy supremów (nie trzeba było tego uzasadniać), dalej mamy

$$\sup_{x\geq 0} \left(|f(x)| + |g(x)|\right) e^{-x} \leq \sup_{x\geq 0} |f(x)| \, e^{-x} + \sup_{x\geq 0} |g(x)| \, e^{-x} = \|f\| + \|g\| ,$$

czyli podaddytywność normy jest udowodniona.

iii.
$$\|\alpha f\| = \sup_{x\geq 0} |\alpha f(x)| \, e^{-x} = \sup_{x\geq 0} |\alpha| \, |f(x)| \, e^{-x} = |\alpha| \sup_{x\geq 0} |f(x)| \, e^{-x} = |\alpha| \, \|f\| .$$

Typowe błędy: Nikt nie sprawdził, czy podany wzór na normę ma sens, czyli czy widniejące w definicji supremum jest skończone.

(c) Obliczyć normę wielomianu $f_n(x) = x^n$. (6p)

Rozwiązanie:

$$\|f_n\| = \sup_{x \geq 0} x^n e^{-x}.$$

Wiadomo, że jeśli funkcja $g_n(x) = f_n(x)e^{-x}$ ma ekstremum lokalne (a supremum globalne jest siłą rzeczy ekstremum lokalnym) w punkcie x_0 należącym do jej dziedziny *wraz z pewnym swoim otoczeniem*, to pochodna g_n w punkcie x_0 musi się zerować. Jedynym punktem, który nie leży we wnętrzu dziedziny g_n, jest 0, ale $g_n(0) = 0$, więc tam na pewno supremum nie będzie. Policzmy pochodną g_n:

$$g_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n - x),$$

a więc pochodna zeruje się tylko w punkcie $x = n$ (i w $x = 0$, ale ten punkt leży na brzegu dziedziny, więc pochodna wiele nam o nim nie powie). Ponieważ $g_n(0) = 0 = \lim_{x\to\infty} g_n(x)$, a poza tym $g_n(x) > 0$ dla $x > 0$, to g_n musi gdzieś mieć supremum, a właśnie znaleźliśmy jedyny punkt, gdzie ekstremum może być osiągane. Ostatecznie zatem

$$\|f_n\| = g_n(n) = n^n e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Typowe błędy: Zapominanie o e^{-x} i liczenie supremum samej funkcji x^n lub badanie pochodnej w zerze.

2. Przestrzenie Hilberta

(a) Podać definicję układu ortonormalnego w przestrzeni Hilberta. (3p)

Rozwiązanie: Podzbiór E przestrzeni Hilberta H nazywamy ortonormalnym, jeśli

i.
$$\forall_{x\in E}\, \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 1,$$

ii.
$$\forall_{x,y\in E}\, (x \neq y \implies \langle x, y\rangle = 0)\,.$$

Równoważnie można napisać, że dla dowolnych $x, y \in E$ mamy $\langle x, y\rangle = \delta_{xy}$, gdzie δ_{xy} to delta Kroneckera.

Typowe błędy: Zapominanie o warunku $x \neq y$ i pisanie czegoś w rodzaju „$\forall_{x,y\in E}\, \langle x, y\rangle = 0$" lub wręcz „$\forall_{x,y\in H}\, \langle x, y\rangle = 0$", jakby cała przestrzeń H miała być układem ortogonalnym (co jest oczywiście niemożliwe, bo żaden wektor nie jest ortogonalny sam do siebie ani do swoich wielokrotności).

(b) Pokazać, że następujący ciąg jest ortonormalny w ℓ^2 (3p):

$$v_1 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{-1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots),$$
$$v_2 = (0, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{-1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots),$$
$$v_3 = (0, 0, 0, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{-1}{2}, 0, 0, 0, 0, \ldots),$$
$$\ldots$$

Rozwiązanie: Przypomnijmy, jak działa iloczyn skalarny w ℓ^2:

$$\langle (x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots$$

Każdy wektor v_n ma na czterech współrzędnych wartość $\pm\frac{1}{2}$, a poza tym zera. Oznacza to, że suma kwadratów jego współrzędnych wynosi $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$, a więc $\|v_n\| = 1$. Dalej, jeśli $n \neq m$ i $|m - n| \geq 2$, to nie ma żadnej współrzędnej, na której wektory v_n i v_m miałyby jednocześnie coś innego niż zero, a więc $\langle v_n, v_m \rangle = 0$. Wreszcie $\langle v_n, v_{n+1} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$. Ostatecznie zatem $\langle v_n, v_m \rangle = \delta_{mn}$.

(c) Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $v = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \ldots)$ na podprzestrzeń $X_0 = \operatorname{lin}\{v_1, v_2\}$.

Rozwiązanie: Przypomnijmy definicję rzutu ortogonalnego wektora v na podprzestrzeń $W = \operatorname{lin}\{v_1, v_2\}$: jest to taki wektor $w \in W$, że $v - w \perp W$, czyli dla każdego $w' \in W$ mamy $\langle v - w, w' \rangle = 0$. W naszym przypadku skoro $w \in W$, to $w = \alpha v_1 + \beta v_2$. Ortogonalność do W jest równoważna ortogonalności do wszystkich wektorów bazowych, więc musimy mieć

$$0 = \langle v - w, v_1 \rangle = \langle v - \alpha v_1 - \beta v_2, v_1 \rangle = \langle v, v_1 \rangle - \alpha \langle v_1, v_1 \rangle - \beta \langle v_2, v_1 \rangle = \langle v, v_1 \rangle - \alpha,$$

bo $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$, a $\langle v_2, v_2 \rangle = 0$ (z ortonormalności układu (v_n)). Stąd $\alpha = \langle v, v_1 \rangle$ i analogicznie $\beta = \langle v, v_2 \rangle$, wystarczy więc obliczyć odpowiednie iloczyny skalarne:

$$\langle v, v_1 \rangle = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$\langle v, v_2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ostatecznie zatem

$$w = v_1 + \frac{1}{2} v_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0, \ldots).$$

Można też było nie wyprowadzać postaci rzutu, tylko od razu skorzystać z faktu, że jeśli v_1 i v_2 są bazą ortonormalną w W, to rzut wektora v na W wyraża się wzorem

$$w = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2.$$

Typowe błędy: Pisanie, że jeśli w jest rzutem ortogonalnym v na W, to $w \perp v$ (a to różnica wektorów ma być ortogonalna do podprzestrzeni W). Wiele osób zapomniało też o warunku, że rzut ortogonalny na podprzestrzeń musi należeć do tej podprzestrzeni, czyli być postaci $w = \alpha v_1 + \beta v_2$, i zapisywało go tylko postaci $w = (w_1, w_2, w_3, \ldots)$, ewentualnie zwracając tylko uwagę, że współrzędne powyżej szóstej są zerowe. Przy takiej próbie rozwiązania mamy jednak w najlepszym razie 6 niewiadomych, co nie pozwala znaleźć rzutu.

3. **Operatory i funkcjonały**

(a) Sformułować twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału na $C([0, 1])$. (5p)

Rozwiązanie: Dla każdego funkcjonału liniowego ograniczonego P na $C([0,1])$ istnieje dokładnie jedna skończona, znakowana miara borelowska μ na $[0,1]$, taka że

$$P(f) = \int_{[0,1]} f d\mu$$

dla każdej funkcji $f \in C([0,1])$, i odwrotnie, każda skończona, znakowana miara borelowska μ zadaje pewien funkcjonał ograniczony P na $C([0,1])$ określony powyższym wzorem. Jeśli ponadto funkcjonał P jest zadany przez miarę μ, to $\|P\| = |\mu|([0,1])$ (gdzie $|\mu|$ oznacza wahanie miary μ).

Typowe błędy: Zapominanie o wzajemnej jednoznaczności (każda miara wyznacza funkcjonał i każdy funkcjonał jest wyznaczany przez miarę — to dwa oddzielne warunki), o równości między normą funkcjonału a wahaniem miary, lub pisanie tylko, że przestrzeń sprzężona do $C([0,1])$ jest izomorficzna z przestrzenią znakowanych miar borelowskich na $C([0,1])$, ale bez podania tego izomorfizmu.

(b) Określmy funkcjonał $P_n \in C([0,1])^*$ wzorem

$$P_n(f) = \int_0^1 f(x^n)dx.$$

Wyznaczyć funkcjonał P, do którego ciąg P_n zbiega $*$-słabo.

Rozwiązanie: Oznaczmy $f_n(x) = f(x^n)$. Dla $0 \leq x < 1$ mamy $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, więc z ciągłości f wynika, że $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(0)$. Innymi słowy ciąg f_n zbiega prawie wszędzie do funkcji stale równej $f(0)$. Ponieważ dla każdego x i n mamy $|f_n(x)| = |f(x^n)| < \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$, ciąg f_n jest wspólnie ograniczony przez stałą. Możemy zatem zastosować twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej (funkcja stała jest całkowalna na przestrzeni o mierze skończonej), uzyskując

$$\lim_{n\to\infty} P_n(f) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(0)dx = f(0) =: P(f).$$

Powyższa zbieżność zachodzi dla każdej funkcji ciągłej f, ostatecznie zatem funkcjonały P_n zbiegają $*$-słabo do funkcjonału P zadanego wzorem $P(f) = f(0)$, czyli reprezentowanego przez miarę atomową skupioną w zerze.

Typowe błędy: Brak uzasadnienia, że można zastosować tw. Lebesgue'a (czyli zwrócenia uwagi na fakt, że funkcje podcałkowe są wspólnie ograniczone) lub złe oszacowanie (np. $f(x^n) \leq \max\{f(0), f(1)\}$).

Analiza funkcjonalna

Egzamin podstawowy 20.06.2013 r.

Zadania na ocenę celującą

1. Niech X będzie przestrzenią unormowaną, a X_0 jej dowolną podprzestrzenią. Dla ustalonego $x \in X \setminus X_0$ oznaczmy
$$d = d(x, X_0) = \inf_{y \in X_0} \|x - y\|.$$
Pokazać, że istnieje funkcjonał $P \in X^*$, taki że $\|P\| \leq 1$, $P(x) = d$ i $P(y) = 0$ dla każdego $y \in X_0$.

   Rozwiązanie: Niech $X_1 = \mathrm{lin}\{x, X_0\}$. Dowolny wektor $v \in X_1$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $v = \alpha x + y$, gdzie $\alpha \in \mathbb{K}, y \in X_0$. Określmy funkcjonał P_1 na X_1 wzorem
$$P_1(\alpha x + y) = \alpha d.$$
Jest to funkcjonał ograniczony, a jego norma nie przekracza 1:
$$|P_1(\alpha x + y)| = |\alpha|\, d = |\alpha| \inf_{y' \in X_0} \|x - y'\| = \inf_{y' \in X_0} \|\alpha x - \alpha y'\| = \inf_{y' \in X_0} \|\alpha x + y'\| \leq \|\alpha x + y\|,$$
a więc $\|P_1\| \leq 1$ (tak naprawdę to jeśli tylko $d > 0$, to $\|P_1\| = 1$, ale zadanie tego nie wymagało). Ponadto oczywiście $P_1(x) = d$. Korzystając z tw. Hahna-Banacha możemy teraz przedłużyć P_1 na całą przestrzeń X, otrzymując żądany funkcjonał.

2. Niech A będzie dowolnym ustalonym podzbiorem przedziału $[0, 1]$ i niech X oznacza przestrzeń funkcji ciągłych na $[0, 1]$ zerujących się na zbiorze A, z normą supremum. Opisać przestrzeń X^*.

   Rozwiązanie: Przede wszystkim zauważmy, że funkcja ciągła zerująca się na A musi się też zerować na jego domknięciu. Niech $\mathcal{M}_0$ oznacza przestrzeń znakowanych miar borelowskich na $[0, 1]$, takich że jeśli $\mu \in \mathcal{M}_0$, to $\mu(B) = 0$ dla każdego $B \subset \overline{A}$. Twierdzimy, że przestrzeń $\mathcal{M}_0$ jest izometrycznie izomorficzna z X^*. W jedną stronę nie jest trudno: jeśli $\mu \in \mathcal{M}_0$, to możemy określić funkcjonał P_μ wzorem $P_\mu(f) = \int f d\mu$, ponadto tak $\|P_\mu\| = |\mu|([0, 1])$. Istotnie, załóżmy że μ jest miarą dodatnią: dla dowolnego $f \in X$ mamy $|P(f)| = \left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu \leq \|f\|\, \mu([0, 1])$, a dla ciągu funkcji ciągłych f_n zerujących się na $\overline{A}$ i dążących do jedynki poza tym zbiorem dostaniemy $P(f_n) \to \mu([0, 1])$ (w tym miejscu właśnie ważne jest domknięcie, inaczej niekoniecznie znaleźlibyśmy ciąg funkcji ciągłych realizujących ograniczenie górne). Dla miar znakowanych równość normy i wahania wynika z rozkładu na część dodatnią i ujemną.

   Skonstruowaliśmy zatem izometryczne odwzorowanie z $\mathcal{M}_0$ w X^*, pozostaje pokazać, że jest to surjekcja. Niech $P \in X^*$. X jest oczywiście podprzestrzenią $C([0, 1])$, więc korzystając z tw. Hahna-Banacha możemy przedłużyć P na całą przestrzeń $C([0, 1])$, otrzymując funkcjonał P' reprezentowany (z tw. Riesza) przez pewną miarę μ'. Niech teraz $\mu(B) = \mu'(B \setminus \overline{A})$ — miara ta zeruje się na $\overline{A}$ (oraz jego podzbiorach) i pokrywa się z μ' poza tym zbiorem. Wynika z tego, że dla $f \in X$ mamy $\int f d\mu = \int f d\mu' = P'(f) = P(f)$, co kończy dowód.